Intelligentes Üben in einem verstehensorientierten Unterricht

STEFAN GÖTZ, WIEN; EVELYN SÜSS-STEPANCIK, BADEN

Das Bearbeiten von Aufgaben gehört zu den Haupttätigkeiten im Mathematikunterricht. Gleichartige Aufgabenstellungen in Schulbüchern („Aufgabenplantagen“) führen im besten Fall zu routiniertem Agieren in standardisierten Settings. Intelligentes Üben ist sinnstiftend, entdeckungsoffen, selbstdifferenzierend und reflexiv. Im Vortrag soll gezeigt werden, wie in herkömmliche Aufgaben Elemente intelligenten Übens einfließen können. Technologieeinsatz relativiert die Wichtigkeit händischer Routinen, sodass die Legitimation von Übungsphasen im Unterricht oder zu Hause für neue Impulse offen ist.

1 Vorwort

Im September 2018 wurde seitens einer Arbeitsgemeinschaft von Lehrenden (in Wien) der Wunsch nach einer Fortbildung zum „Richtigen Üben im Mathematikunterricht“ geäußert. „Der Vortrag solle wissenschaftlich fundiert aber auch praxisnahe sein.“ Eine erste Literaturrecherche hat uns auf das Themenfeld „Intelligentes Üben“ gebracht, das wir im Folgenden wenigstens ansatzweise ausbreiten möchten. Als eine Herausforderung dabei hat sich das Finden einer Systematisierung der Aufbereitung abseits einer rein inhaltlichen und jahrgangsspezifischen Orientierung erwiesen. Wir haben uns dafür entschieden, nach Fähigkeitsaspekten zu differenzieren (Leuders 2009, S. 133).

Ein Anliegen ist es auch gewesen, zu zeigen, dass intelligentes Üben mit Konzepten der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik an AHS (ssRP) kompatibel ist. Entsprechende Hinweise werden immer wieder eingestreut und zeigen gemäß unserem Anliegen, dass das Konzept der ssRP nicht unbedingt nur *teaching to the test* provoziert.

Abschließend ist es den Vorgaben geschuldet, dass sowohl der Vortrag am 26. April 2019 als auch der vorliegende Text in sehr konzentrierter Weise Möglichkeiten des intelligenten Übens präsentiert. Das soll natürlich nicht heißen, dass der Mathematikunterricht sich in intelligentem Üben erschöpfen soll. Es dient vielmehr dazu, den Unterricht an geeigneter Stelle fruchtbarer zu machen.

2 Was wir nicht wollen!

Schlägt man ein Schulbuch auf, dann wird deutlich, dass viel Zeit im Mathematikunterricht für das Üben aufgewendet wird. Abbildung 1 zeigt zwei typische „Aufgabenplantagen“, wie sie im üblichen Mathematikunterricht zur Anwendung kommen:

> „Bevor Schülerinnen und Schüler Mathematik betreiben können, müssen sie sich erst einmal bestimmte Fertigkeiten und Kenntnisse aneignen. Das geschieht durch Wiederholung und langsames Erhöhen der Schwierigkeit.“ (Leuders 2009, S. 133)

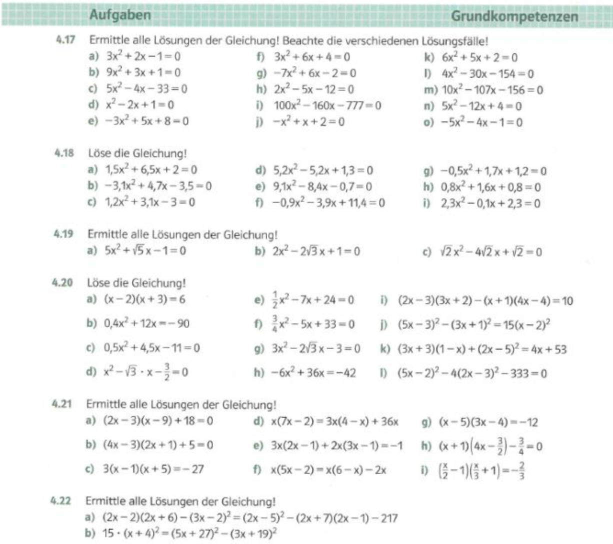
Die Schulbuchseite in Abbildung 2 spiegelt eine wohlbekannte Strukturierung von Lernprozessen im Mathematikunterricht wieder.

> „Das Erarbeiten von mathematischen Begriffen wird getrennt von der Übung und Anwendung dieser Begriffe. Das Erstere geschieht unter sanfter Begleitung des Lehrers, das Zweite ist die Übepflicht des Schülers.“ (ebd.)

Im herkömmlichen Mathematikunterricht folgt einem kurzen Theorieinput von Seiten der Lehrerin bzw. des Lehrers (oberer Teil in Abbildung 2) eine zeitlich lange Phase des Übens der Schülerinnen und Schüler (unterer Teil in Abbildung 2), sowohl in der Schule als auch zuhause. Wir unterstellen, dass diese Vorgangsweise für beide Seiten nicht immer befriedigend ist und zeigen im Folgenden Alternativen dazu auf. Diese sind als Ergänzung des „unproduktiven Übens“ gedacht,

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 52, 2019, S. 31-48.

nicht als Ersatz. Algorithmisches Einüben von Fähigkeiten dient meist der Festigung von Grundkompetenzen und ist als solches natürlich auch ein wichtiger Baustein eines auf Nachhaltigkeit zielenden Mathematikunterrichts.



Aufgaben — **Grundkompetenzen**

4.17 Ermittle alle Lösungen der Gleichung! Beachte die verschiedenen Lösungsfälle!

a) $3x^2+2x-1=0$ f) $3x^2+6x+4=0$ k) $6x^2+5x+2=0$
b) $9x^2+3x+1=0$ g) $-7x^2+6x-2=0$ l) $4x^2-30x-154=0$
c) $5x^2-4x-33=0$ h) $2x^2-5x-12=0$ m) $10x^2-107x-156=0$
d) $x^2-2x+1=0$ i) $100x^2-160x-777=0$ n) $5x^2-12x+4=0$
e) $-3x^2+5x+8=0$ j) $-x^2+x+2=0$ o) $-5x^2-4x-1=0$

4.18 Löse die Gleichung!

a) $1{,}5x^2+6{,}5x+2=0$ d) $5{,}2x^2-5{,}2x+1{,}3=0$ g) $-0{,}5x^2+1{,}7x+1{,}2=0$
b) $-3{,}1x^2+4{,}7x-3{,}5=0$ e) $9{,}1x^2-8{,}4x-0{,}7=0$ h) $0{,}8x^2+1{,}6x+0{,}8=0$
c) $1{,}2x^2+3{,}1x-3=0$ f) $-0{,}9x^2-3{,}9x+11{,}4=0$ i) $2{,}3x^2-0{,}1x+2{,}3=0$

4.19 Ermittle alle Lösungen der Gleichung!

a) $5x^2+\sqrt{5}x-1=0$ b) $2x^2-2\sqrt{3}x+1=0$ c) $\sqrt{2}x^2-4\sqrt{2}x+\sqrt{2}=0$

4.20 Löse die Gleichung!

a) $(x-2)(x+3)=6$ e) $\frac{1}{2}x^2-7x+24=0$ i) $(2x-3)(3x+2)-(x+1)(4x-4)=10$
b) $0{,}4x^2+12x=-90$ f) $\frac{3}{4}x^2-5x+33=0$ j) $(5x-3)^2-(3x+1)^2=15(x-2)^2$
c) $0{,}5x^2+4{,}5x-11=0$ g) $3x^2-2\sqrt{3}x-3=0$ k) $(3x+3)(1-x)+(2x-5)^2=4x+53$
d) $x^2-\sqrt{3}\cdot x-\frac{3}{2}=0$ h) $-6x^2+36x=-42$ l) $(5x-2)^2-4(2x-3)^2-333=0$

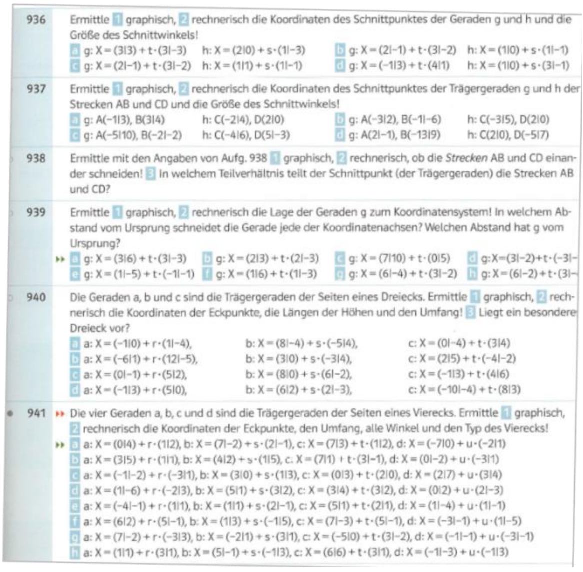
4.21 Ermittle alle Lösungen der Gleichung!

a) $(2x-3)(x-9)+18=0$ d) $x(7x-2)=3x(4-x)+36x$ g) $(x-5)(3x-4)=-12$
b) $(4x-3)(2x+1)+5=0$ e) $3x(2x-1)+2x(3x-1)=-1$ h) $(x+1)\left(4x-\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{4}=0$
c) $3(x-1)(x+5)=-27$ f) $x(5x-2)=x(6-x)-2x$ i) $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{3}+1\right)=-\frac{2}{3}$

4.22 Ermittle alle Lösungen der Gleichung!

a) $(2x-2)(2x+6)-(3x-2)^2=(2x-5)^2-(2x+7)(2x-1)-217$
b) $15\cdot(x+4)^2=(5x+27)^2-(3x+19)^2$

Abb. 1a: Malle et al. 2010, S. 71



936 Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g und h und die Größe des Schnittwinkels!
a g: X = (3|3) + t·(3|−3) h: X = (2|0) + s·(1|−3) b g: X = (2|−1) + t·(3|−2) h: X = (1|0) + s·(1|−1)
c g: X = (2|−1) + t·(3|−2) h: X = (1|1) + s·(1|−1) d g: X = (−1|3) + t·(4|1) h: X = (1|0) + s·(3|−1)

937 Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes der Trägergeraden g und h der Strecken AB und CD und die Größe des Schnittwinkels!
a g: A(−1|3), B(3|4) h: C(−2|4), D(2|0) b g: A(−3|2), B(−1|−6) h: C(−3|5), D(2|0)
c g: A(−5|10), B(−2|−2) h: C(−4|6), D(5|−3) d g: A(2|−1), B(−13|9) h: C(2|0), D(−5|7)

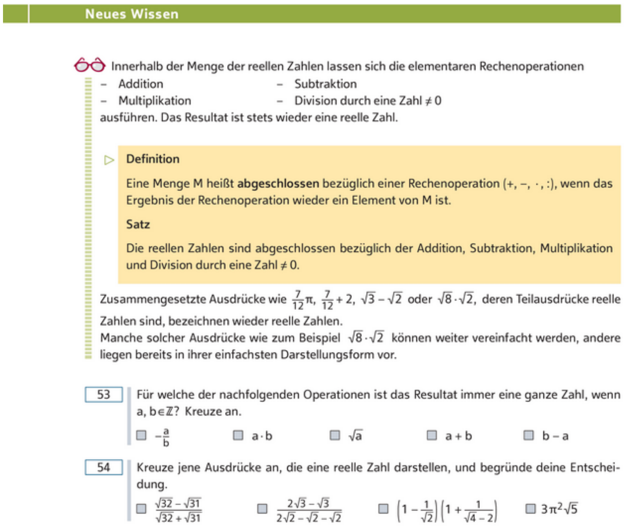
938 Ermittle mit den Angaben von Aufg. 938 1 graphisch, 2 rechnerisch, ob die *Strecken* AB und CD einander schneiden! 3 In welchem Teilverhältnis teilt der Schnittpunkt (der Trägergeraden) die Strecken AB und CD?

939 Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Lage der Geraden g zum Koordinatensystem! In welchem Abstand vom Ursprung schneidet die Gerade jede der Koordinatenachsen? Welchen Abstand hat g vom Ursprung?
a g: X = (3|6) + t·(3|−3) b g: X = (2|3) + t·(2|−3) c g: X = (7|10) + t·(0|5) d g:X=(3|−2)+t·(−3|−
e g: X = (1|−5) + t·(−1|−1) f g: X = (1|6) + t·(1|−3) g g: X = (6|−4) + t·(3|−2) h g: X = (6|−2) + t·(3|−

940 Die Geraden a, b und c sind die Trägergeraden der Seiten eines Dreiecks. Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten der Eckpunkte, die Längen der Höhen und den Umfang! 3 Liegt ein besondere Dreieck vor?
a a: X = (−1|0) + r·(1|−4), b: X = (8|−4) + s·(−5|4), c: X = (0|−4) + t·(3|4)
b a: X = (−6|1) + r·(12|−5), b: X = (3|0) + s·(−3|4), c: X = (2|5) + t·(−4|−2)
c a: X = (0|−1) + r·(5|2), b: X = (8|0) + s·(6|−2), c: X = (−1|3) + t·(4|6)
d a: X = (−1|3) + r·(5|0), b: X = (6|2) + s·(2|−3), c: X = (−10|−4) + t·(8|3)

941 Die vier Geraden a, b, c und d sind die Trägergeraden der Seiten eines Vierecks. Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten der Eckpunkte, den Umfang, alle Winkel und den Typ des Vierecks!
a a: X = (0|4) + r·(1|2), b: X = (7|−2) + s·(2|−1), c: X = (7|3) + t·(1|2), d: X = (−7|0) + u·(−2|1)
b a: X = (3|5) + r·(1|1), b: X = (4|2) + s·(1|5), c: X = (7|1) + t·(3|−1), d: X = (0|−2) + u·(−3|1)
c a: X = (−1|−2) + r·(−3|1), b: X = (3|0) + s·(1|3), c: X = (0|3) + t·(2|0), d: X = (2|7) + u·(3|4)
d a: X = (1|−6) + r·(−2|3), b: X = (5|1) + s·(3|2), c: X = (3|4) + t·(3|2), d: X = (0|2) + u·(2|−3)
e a: X = (−4|−1) + r·(1|1), b: X = (1|1) + s·(2|−1), c: X = (5|1) + t·(2|1), d: X = (1|−4) + u·(1|−1)
f a: X = (6|2) + r·(5|−1), b: X = (1|3) + s·(−1|5), c: X = (7|−3) + t·(5|−1), d: X = (−3|−1) + u·(1|−5)
g a: X = (7|−2) + r·(−3|3), b: X = (−2|1) + s·(3|1), c: X = (−5|0) + t·(3|−2), d: X = (−1|−1) + u·(−3|−1)
h a: X = (1|1) + r·(3|1), b: X = (5|−1) + s·(−1|3), c: X = (6|6) + t·(3|1), d: X = (−1|−3) + u·(−1|3)

Abb. 1b: Götz & Reichel 2010, S. 255



Neues Wissen

Innerhalb der Menge der reellen Zahlen lassen sich die elementaren Rechenoperationen
- Addition
- Subtraktion
- Multiplikation
- Division durch eine Zahl $\neq 0$

ausführen. Das Resultat ist stets wieder eine reelle Zahl.

Definition

Eine Menge M heißt **abgeschlossen** bezüglich einer Rechenoperation (+, −, ·, :), wenn das Ergebnis der Rechenoperation wieder ein Element von M ist.

Satz

Die reellen Zahlen sind abgeschlossen bezüglich der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division durch eine Zahl $\neq 0$.

Zusammengesetzte Ausdrücke wie $\frac{7}{12}\pi$, $\frac{7}{12}+2$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ oder $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$, deren Teilausdrücke reelle Zahlen sind, bezeichnen wieder reelle Zahlen.
Manche solcher Ausdrücke wie zum Beispiel $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$ können weiter vereinfacht werden, andere liegen bereits in ihrer einfachsten Darstellungsform vor.

53 Für welche der nachfolgenden Operationen ist das Resultat immer eine ganze Zahl, wenn $a, b \in \mathbb{Z}$? Kreuze an.
☐ $-\frac{a}{b}$ ☐ $a\cdot b$ ☐ $\sqrt{a}$ ☐ $a+b$ ☐ $b-a$

54 Kreuze jene Ausdrücke an, die eine reelle Zahl darstellen, und begründe deine Entscheidung.
☐ $\frac{\sqrt{32}-\sqrt{31}}{\sqrt{32}+\sqrt{31}}$ ☐ $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}}$ ☐ $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{4}-2}\right)$ ☐ $3\pi^2\sqrt{5}$

Abb. 2: Bleier et al. 2017, S. 20

3 Wofür üben?

3.1 Was kann man alles üben?

In Tabelle 1 werden einige Fähigkeiten bzw. Fertigkeiten aufgezählt, die durch wohl überlegte Übungsaufgaben (die durchaus aus gängigen Übungsaufgaben generiert werden können!) adressiert werden können. Das gewählte Beispielthema *Quadratische Gleichungen* eignet sich nicht nur für Aufgabenplantagen, sondern kann auch zum intelligenten Üben genutzt werden. Dabei zeigt sich, dass eben nicht alles auf diesem Gebiet „auf Knopfdruck“ gelöst werden kann. Beispielsweise basiert die erklärte Anwendungsfähigkeit auf dem Erkennen von Termstrukturen (Fischer & Malle 1985, S. 65).

Tab. 1: Was man alles üben kann … (vgl. Leuders 2009, S. 133)

Fähigkeitsaspekte	am Beispielthema „Quadratische Gleichungen“
Kenntnisse	die Struktur kennen und wiedererkennen; Spezialfälle als solche identifizieren
Fertigkeiten	Lösungen ermitteln (mit und ohne Technologie)
Verstehen / Vorstellungen	über mögliche Anzahlen und Arten von Lösungen Bescheid wissen
Anwendungsfähigkeit	in nicht vertrauten Situationen quadratische Gleichungen identifizieren und nutzen
(übergreifende) Strategien	Teil der quadratischen Gleichung als Funktionsterm zur Beschreibung von quadratischen Abhängigkeiten abstrahieren
Reflexionsfähigkeit	entscheiden können, wie viele Lösungen existieren
Einstellungen	… und auch dazu bereit sein.

Die folgenden Abschnitte illustrieren exemplarisch ausgewählte Fähigkeitsaspekte aus Tabelle 1, indem dazu passende Aufgaben bzw. Beispiele präsentiert werden.

3.2 Kenntnisse

Zum Fähigkeitsaspekt „Kenntnisse“ (Zeile 1 von Tabelle 1) schlagen wir die Aufgaben 1 bis 3 vor.

Aufgabe 1 (vgl. Block 2018)

Die vier Spalten enthalten quadratische Gleichungen, die bzgl. ihrer Struktur Gemeinsamkeiten aufweisen. Finde heraus welche und gib passende Überschriften an!

???	???	???	???
$x^2 = -14$	$-2x^2 = 3x^2 + 15x - 10$	$(x-5)(x+3) = 9$	$x^2 + x - 4 = 0$
$-10 = (x+4)^2$	$25x^2 - 100x + 50 = 0$	$(2x-7)^2 = 20$	$x^2 + 2x - 10 = 0$
$4x \cdot (3x+12) = 0$	$\frac{1}{51}x^2 + \frac{5}{17}x - \frac{9}{34} = 0$	$4x \cdot (3x+12) = 0$	$3x^2 - \frac{4}{11}x - \frac{11}{7} = 0$
	$40 = 8x^2$	$(x+3) = \frac{6}{(x-9)}$	
$(x-5)(x+3) = 0$	$x^2 = -16x - 64$	$(x-5)(x+3) = 0$	
	$x^2 + 9x - 20 = 16$		

Die linke Spalte enthält Gleichungen, die „durch Hinsehen“ gelöst werden können. Für die Gleichungen der zweiten Spalte sind Elementarumformungen notwendig bzw. sinnvoll, bevor sie gelöst werden können. Die dritte Spalte besteht aus Gleichungen, die die konkrete Elementarumformung „Ausmultiplizieren“ erfordern. Die Gleichungen in der letzten Spalte können durch direktes Anwenden einer Lösungsformel gelöst werden.

Die Gleichung $4x \cdot (3x + 12) = 0$ kann sowohl durch „Hinsehen“ als auch mittels Ausmultiplizierens bearbeitet werden.

Eine Ableitung von Aufgabe 1 stellt Aufgabe 2 dar. Sie erweitert das Anforderungsprofil einerseits (Frage 1), und schränkt es andererseits auch ein (Frage 2) im Vergleich zu Aufgabe 1.

Aufgabe 2 (vgl. Block 2018)

1. Ordne die Gleichungen nach ihrer Struktur!
2. Ordne die Gleichungen nach möglichen Lösungsstrategien!

$$(2x-4)\cdot(2x+4)-(3x-5)^2=(2x-7)^2-(2x+5)\cdot(2x-3)-217$$

$$-x^2 = 6x + 9$$

$$11x^2 = -4{,}4x$$

$$(x+1)^2 = 52 - (x-1)^2$$

$$(1-5x)\cdot(5x+1) = -24$$

$$-6x - 2\cdot\sqrt{2} + 5\cdot\sqrt{2}\cdot x^2 = 0$$

$$64x^2 - 25 = 0$$

$$5x^2 = -50$$

Aufgabe 3 schließlich öffnet den Fragekomplex der Aufgaben 1 und 2.

Aufgabe 3 (Block 2018, S. 23)

Schreibe die Gleichungen auf Kärtchen und schneide sie aus. Sortiere die Karten mit den Gleichungen. Nenne deine Kriterien und erläutere sie.

Beachte: Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Gleichungen zu sortieren.

A $-2x^2 = 3x^2 + 15x - 10$	B $x^2 + 4x = 0$	C $(x-8)^2 = 0$	D $2x + x^2 - 10 = 0$
E $-10 = (x+4)^2$	F $x^2 + x - 4 = 0$	G $x^2 = -16x - 64$	H $(x-5)(x+3) = 9$
I $6x^2 - 15 = 0$	J $x^2 = x$	K $5x^2 = -26$	L $(2x-7)^2 = 20$
M $40 = 8x^2$	N $4x \cdot (3x+12) = 0$	O $4x^2 + 16x + 20 = 0$	P $x^2 = 50$
Q $(x-5)(x+3) = 0$	R $(x+3) = \frac{6}{(x-9)}$	S $x^2 = -14$	T $x^2 + 9x - 20 = 16$

Sie kann folgendermaßen fortgesetzt werden: 1. Such dir drei Aufgaben aus! Löse sie! Begründe, warum du diese gewählt hast! 2. Stell dir vor, du musst alle Aufgaben lösen und darfst fünf aussortieren. Welche würdest du aussortieren? Warum? (Block 2018, S. 24). Diese beiden Aufforderungen dienen der Reflexion des Themenbereichs „Quadratische Gleichungen“.

Alle hier gestellten Aufgaben können leicht aus vorgegebenen Aufgabenplantagen konzipiert werden.

3.3 Verstehen / Vorstellungen

> „Schließlich lässt sich der kognitive Anspruch einer Aufgabe als hoch charakterisieren, wenn […] Reflexionen […] nötig sind […].“ (Drüke-Noe & Siller 2018, S. 3)

Aufgabe 4

Finde eine quadratische Gleichung, die

1) nur eine Lösung hat!
2) nur 1 als Lösung hat!
3) keine (reelle) Lösung hat!
4) die Lösungen -2 und +3 hat!
5) die Lösungen 1, 2 und 3 hat!
6) 0 als Lösung hat!
7) 0 als Lösung hat und für die $q \neq 0$ bzw. $c \neq 0$ gilt!

Aufgabe 4 dient der Reflexion des Lösungsverhaltens von quadratischen Gleichungen und sollte daher eher am Ende der Unterrichtssequenz „Quadratische Gleichungen“ stehen. Mögliche Lösungen sind:

ad 1) $(x-a)^2 = 0$ ad 2) $(x-1)^2 = 0$ ad 3) $x^2 = -1$

ad 4) $(x+2)\cdot(x-3) = 0$ ad 5) gibt es nicht ad 6) $x^2 = 0$ ad 7) gibt es nicht

Aufgabe 4 entsteht also durch die Strategie der Zielumkehr (Götz & Süss-Stepancik 2018) und erfordert folgende algebraische Grundvorstellungen zum Themenbereich „Quadratische Gleichungen“: die Formen $x^2 + px + q = 0$ bzw. $(x-x_1)\cdot(x-x_2) = 0$ und eventuell daraus abgeleitet die Gleichung $x_1 \cdot x_2 = q$ (Satz von Vieta). Außerdem werden Spezialfälle wie Doppellösungen oder komplexe Lösungen angesprochen.

3.4 Übergreifende Strategien

Bei Aufgabe 5 müssen mehrere Repräsentationsformen (Gleichung – Funktion – Graph) durch Transformationen in einander übergeführt werden (Drüke-Noe & Siller 2018, S. 5).

Aufgabe 5

Gegeben ist die Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$.

☞ Finde verschiedene grafische Lösungsmöglichkeiten und führe sie durch!

☞ Wo können die Lösungen jeweils abgelesen werden?

In Abbildung 3 sind zwei von unendlich vielen Lösungsmöglichkeiten zu sehen. Aufgabe 5 bringt einige Transformationen mit sich: Zuerst wird innerhalb einer Repräsentationsform (Gleichung) modifiziert, dann jede Seite der erhaltenen Gleichung als eigener Funktionsterm aufgefasst, der Graph der zugehörigen Funktion wird in einem Koordinatensystem dargestellt, die Schnittpunkte werden abgelesen und ihre Abszissen als Lösungen der ursprünglichen (!) Gleichung interpretiert (Abbildung 3).

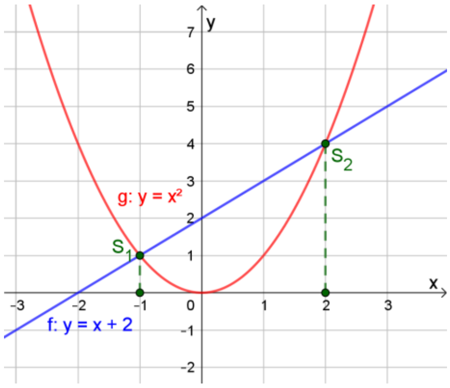


Abb. 3a: Lösungsmöglichkeit 1

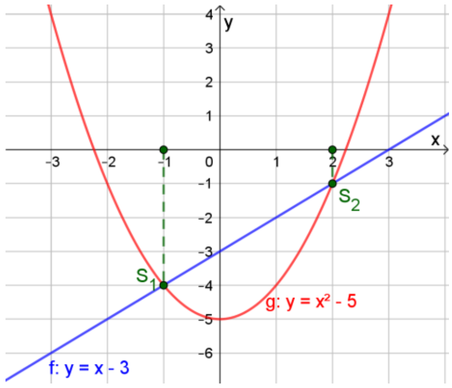


Abb. 3b: Lösungsmöglichkeit 2

3.5 Eine mögliche Reifeprüfungsaufgabe

Quadratische Gleichungen können in der Menge der reellen Zahlen keine, genau eine oder zwei verschiedene Lösungen haben.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie jeder Lösungsmenge L die entsprechende quadratische Gleichung in der Menge der reellen Zahlen zu!

$L = \{\ \}$	
$L = \{-4;\ 4\}$	
$L = \{0;\ 4\}$	
$L = \{4\}$	

A	$(x + 4)^2 = 0$
B	$(x - 4)^2 = 25$
C	$x(x - 4) = 0$
D	$-x^2 = 16$
E	$x^2 - 16 = 0$
F	$x^2 - 8x + 16 = 0$

(Übungsklausuraufgaben für die SRP in Mathematik o. J., https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/index.php)

Diese Aufgabe verbindet Elemente des (Aus-)Sortierens (Abschnitt 3.2) mit Elementen des Verstehens (Abschnitt 3.3). Intelligentes Üben kann also als Vorbereitung mancher Teil-1-Aufgaben dienen. Will man eine bloße Technologiebehandlung dieser Aufgabe verhindern, kann nach einer Begründung gefragt werden, warum zum Beispiel D die leere Menge als Lösungsmenge hat.

3.6 Reflektierendes Üben – Reflexionsfähigkeit

Reflexionsprozesse können durch sogenannte „Störaufgaben“ (Rott 2018, S. 19) ausgelöst werden und so Routinetätigkeiten unterbrechen. Wir wollen nun einer Metaebene folgend das Thema *quadratische Gleichungen* verlassen und wenden uns einem anderen Thema der Oberstufe (vgl. Götz & Reichel 2010, S. 191) zu, dessen Wurzeln schon in der Unterstufe (vgl. Reichel & Humenberger 2011b, S. 136) angesprochen werden können: Aufgabe 6.

Aufgabe 6

100% Steigung entspricht 45° Steigungswinkel. Sind 200% dann 90°?

Abbildung 4 gibt ein weiteres Beispiel zur Nichtlinearität des Steigungswinkels, wenn er in Abhängigkeit zur zugehörigen Steigung betrachtet wird.

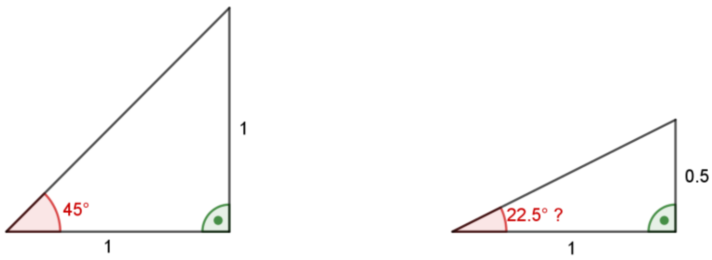


Abb. 4: Zur Abhängigkeit des Steigungswinkels von der Steigung

Praktisch auf jeder Schulstufe können sogenannte Zahlenmauern im Unterricht bearbeitet werden, hier werden sie zur Reflexion der binomischen Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ verwendet.

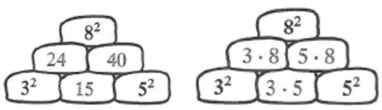


Abb. 5a: Zahlenmauern zur binomischen Formel
$(3 + 5)^2 = 8^2$ (Müller 2005, S. 34)

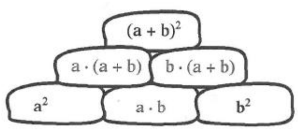
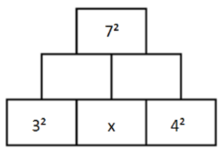


Abb. 5b: Zahlenmauer zur binomischen Formel
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (Müller 2005, S. 34)

Die Zahlenmauern in Abbildung 5 sind ein wenig trickreich zu lesen: Der mittlere Stein der untersten Reihe „wirkt“ sowohl auf den Stein links als auch auf den rechts darüber. Und damit wird das berühmte Mittelglied dieser binomischen Formel erklärt. Aufgabe 7 schlägt genau in diese Kerbe.

Aufgabe 7

Fülle die gegebene Zahlenmauer fertig aus!



Die nächste Aufgabe bietet sich bei der Behandlung pythagoreischer Tripel an.

Aufgabe 8

Gibt es Zahlenmauern mit zwei oder drei Basissteinen, die nur mit Quadratzahlen befüllt werden?

Die Antwort lautet in beiden Fällen „ja“: Abbildung 6.

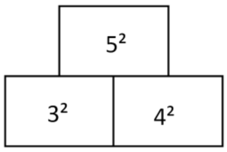


Abb. 6a: Eine Zahlenmauer mit Quadratzahlen (Müller 2005, S. 34)

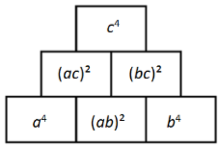


Abb. 6b: Eine Zahlenmauer mit Quadratzahlen, wobei $a^2 + b^2 = c^2$ gilt (Müller 2005, S. 34)

3.7 Keine Hierarchie

Die Fähigkeitsaspekte in Tabelle 1 sind alle gleichermaßen im Unterricht anzusprechen, sodass alle Schülerinnen und Schüler alle Aspekte üben können und müssen (Leuders 2009, S. 133). Vergleicht man die Aufgaben in den Abschnitten 3.2 bis 3.6, so können durchaus unterschiedliche Schwierigkeitsgrade festgestellt werden. Für den Fähigkeitsaspekt „Kenntnisse“ wollen wir das exemplarisch belegen: Aufgabe 1 zählt sicher zu den leichten Aufgaben, da die Sortierung schon vorgegeben und von den Schülerinnen und Schülern nur noch zu benennen ist. Bei Aufgabe 2 ist die Ordnungsstruktur erst zu definieren, womit sich der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe ein wenig erhöht. Bei der Erweiterung von Aufgabe 3 sind die Lernenden aufgefordert, fünf Aufgaben, die sie nicht lösen wollen, auszuscheiden und ihre Wahl zu begründen. Dies erfordert eine Beurteilung der Schwierigkeit der gegebenen Gleichungen, ohne diese zu lösen.

4 Kognitiver Anspruch und Schwierigkeit einer Aufgabe

4.1 Schwierigkeitsgenerierende Merkmale

Will man den kognitiven Anspruch einer Aufgabe beschreiben, so kann die folgende Gliederung hilfreich sein (Drüke-Noe & Siller 2008, S. 3):

Aufgaben mit einem niedrigen kognitiven Anspruch zeichnen sich durch einschrittige Aktivitäten, die direkt aus der Aufgabenstellung ersichtlich sind, aus. Aufgaben mit einem mittleren kognitiven Anspruch fordern dementsprechend mehrschrittige Aktivitäten, bei denen Querverbindungen herzustellen sind. Von einem hohen kognitiven Anspruch spricht man dann, wenn komplexe Prozesse ablaufen müssen, Reflexionen oder Verallgemeinerungen gefordert sind.

Die Schwierigkeit einer Aufgabe definiert die empirische Lösungsquote alleine (Drüke-Noe & Siller 2008, S. 4). Für ausgewählte Aufgaben aus den Bildungsstandards M8 werden die Lösungsquoten angegeben: *Freigegebene Items Standardüberprüfung M8 – 2017*, https://www.bifie.at/wp-content/uploads/2018/02/Freigegebene-Items_M8_2017_web.pdf. Eine Übersicht über die Ergebnisse inklusive Lösungsquoten für die ssRP im Haupttermin 2015 bietet Kramer & Sattlberger 2016.

Der kognitive Anspruch eine Aufgabe muss jedoch nicht immer mit dem Schwierigkeitsgrad derselben einhergehen. Das *Lösen der Gleichung* $-2x^2 - 8x + 42 = 0$ ist kognitiv sicher nicht anspruchsvoll, kann aber eine niedrige empirische Lösungsquote mit sich bringen, wegen des negativen Vorzeichens bei x^2. Im Gegensatz dazu, ist die Aufforderung: „*Finde eine quadratische Gleichung, die keine ganzzahligen aber rationale Lösungen hat!*“, von reflexivem Charakter, hat also einen hohen kognitiven

Anspruch, ihre empirische Schwierigkeit schätzen wir aber als nicht hoch ein, da sie mit Technologieeinsatz auf Knopfdruck zu erledigen ist.

Welche Merkmale zeichnet die Schwierigkeit einer Aufgabe eigentlich aus (vgl. Drüke-Noe 2018, S. 11)? Die Zugehörigkeit zu einer bestimmten Klassenstufe ist nur bedingt aussagekräftig, da sich von Jahrgangsstufe zu Jahrgangsstufe vor allem die mathematischen Werkzeuge ändern, nicht aber unbedingt bei jeder Aufgabe der Komplexitätsgrad. Zum Beispiel ist die Aufgabe

> „Zum Wägen stehen folgende Wägestücke zur Verfügung: 1 kg, 2 kg (zweimal) und 5 kg. Gib an, auf welche Weise damit Waren von 1 kg, 2kg, 3 kg … 10 kg gewogen werden können!“ (Reichel & Humenberger 2011a, S. 47)

aus der fünften Jahrgangsstufe sicher schwieriger als das vektorielle Produkt zweier Vektoren (zehnte Jahrgangsstufe) zu berechnen. Dazu passt auch, den zeitlichen Abstand der Schülerinnen und Schüler zu einer bestimmten Aufgabe (vergleiche das erste und dritte freigegebene Item bei den Bildungsstandards M8 im Jahr 2017: https://www.bifie.at/wp-content/uploads/2018/02/Freigegebene-Items_M8_2017_web.pdf) ins Auge zu fassen.

Die beiden Aufgaben zeigen weiters, dass die inhaltliche Komplexität und die daraus folgende Anzahl der zu steuernden Denkprozesse maßgeblich den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe beeinflussen. Auch die Offenheit einer Aufgabenstellung gehört hier genannt.

Teil-2-Aufgaben bei der ssRP sind oftmals öffentlich ob ihrer „Textlastigkeit“ kritisiert worden (https://diepresse.com/home/bildung/schule/5435854/Nicht-genuegend-fuer-die-Zentralmatura). Ihre Herausforderung liegt meist tatsächlich im Umgang mit dem gegebenen Kontext, um den mathematischen Kern der Aufgabe zu erkennen. Kontextabhängig kann es dabei zu schülerspezifischen Übersetzungsschwierigkeiten kommen. Damit Hand in Hand geht das Merkmal der sprachlogischen Komplexität.

Eine reine Operieraufgabe schließlich ist sicher einfacher als eine, die zusätzlich Interpretationsaufwand und/oder Begründungsnotwendigkeit mit sich bringt. Die Komplexität der involvierten Handlungsprozesse ist also ein weiterer Faktor für den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe.

Einfache Aufgaben zeichnen sich durch niedrige kognitive Anforderungen aus. Sie sind in der Regel einschrittig (s. o.) und durch Vorwärtsarbeiten zu lösen. Teil-1-Aufgaben beispielsweise bei der ssRP kommen überwiegend mit relativ wenig Text aus und der (innermathematische) Kontext ist vertraut. Wenn der Aufgabentext länger ist, dann um zu erklären, was zu tun ist.

Der Technologieeinsatz macht das Merkmal „einfaches Zahlenmaterial“ für leichte Aufgaben eigentlich obsolet.

Geforderte Argumentationen passen erfahrungsgemäß schlecht zu einfachen Aufgaben, schon alleine deswegen, weil oft die Argumentationsbasis nicht eindeutig feststeht (vgl. Drüke-Noe 2018, S. 12).

4.2 Eine mögliche Konkretisierung

Wir schlagen als Methode *Gruppenexplorationen* vor, die vor allem für heterogene Lerngruppen passende Aufgabenstellungen zulassen. Dabei passiert die Differenzierung durch das Stellen von parallelen Aufgaben. Die nächsten beiden Aufgaben sollen dies exemplarisch darstellen.

Aufgabe 9 (Büchter & Leuders 2005, S. 110)

Finde möglichst viele Stammbrüche, deren Summe wieder ein Stammbruch ist!

Sehr einfach sind Gleichungen der Art $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ zu finden, allgemein

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}.$$

Möchte man Gleichungen anderer Bauweise erzeugen, dann hilft der Ansatz $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+a} + \frac{1}{n+b}$ weiter. Hierzu kann die Lehrerin bzw. der Lehrer differenzieren, welche Hinweise sie/er geben möchte. Umformungen ergeben die Bedingung $n^2 = a \cdot b$, die immer die Lösung $a = n^2$ und $b = 1$ zulässt. Damit erhalten wir als zweite lösungsgenerierende Formel

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+n^2}.$$

Ein Beispiel dazu wäre also $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$.

Aufgabe 10 (Büchter & Leuders 2005, S. 110)

Finde alle neunstelligen Zahlen, bei denen die Ziffern 1 bis 9 genau einmal vorkommen und die durch 99 teilbar sind!

Ein Beispiel ist 197845362. Insgesamt gibt es 31680 solche Zahlen! Angefangen vom Finden konkreter Beispiele und Gegenbeispiele über das Anführen der passenden Teilbarkeitsregel bis zur Variablenbenennung der „positiven" und „negativen" Ziffernsummen und einer damit einhergehenden Fallunterscheidung sind hier genug Differenzierungsmöglichkeiten gegeben.

5 Wie entwickelt man gute Übungsaufgaben?

5.1 Vorüberlegungen

Zum intelligenten Üben gehören Strukturen, die „Lernen und Üben nach den Prinzipien des aktiven und entdeckenden Lernens'" (Wittmann, zitiert nach Rott 2018, S. 18) ermöglichen.

> „Das Lernen von Mathematik ist umso wirkungsvoller […], je mehr es im Sinne eigener aktiver Erfahrungen betrieben wird, je mehr der Fortschritt im Wissen, Können und Urteilen des Lernenden auf selbständigen entdeckerischen Unternehmungen beruht." (Winter 2016, S. 1)

Weiters ist wie in Abschnitt 4.2 schon erwähnt, das Differenzieren im Mathematikunterricht notwendig, um intelligentes Üben zu realisieren. Dabei gilt: „Schwache fördern, Starke fordern!" Aufgaben, die zum Nachdenken motivieren, die zum Reflektieren einladen, sind unabdingbarer Bestandteil einer Unterrichtssequenz zum intelligenten Üben.

In Götz & Süss-Stepancik (2018) werden Strategien genannt, mit denen Testitems zu Lernaufgaben umgestaltet werden können: Kontextualisierung, Öffnen der Aufgabe (Zielumkehr, Variationen), Gegenbeispiele einfordern, Aussagen begründen lassen, Anwendungsbeispiele finden lassen und Grenzen eines Modells nachfragen.

Vor dem Erstellen der eigentlichen Aufgabe ist zu klären, welche Tätigkeit geübt werden soll. Wir unterscheiden vier Fälle:

1) Beim *Wiedergeben von Wissen* (Zusammenhängen, Bezeichnungen, …) ist zu klären, was zu üben oder zu wiederholen ist. Zum Beispiel: Definition des arithmetischen Mittels, oder der Zusammenhang $\sum_{i=1}^{n} x_i = n \cdot \bar{x}$ (Ausgleichseigenschaft des arithmetischen Mittels).
2) Das *Ausführen von Verfahren*, zum Beispiel: Bestimmen von Quartilen.
3) Beim *Anwenden von Begriffen* ist zu klären, welche gemeint sind und auf welche Weise diese eingesetzt werden sollen. Zum Beispiel: Schularbeitsnoten versus Punkteanzahlen – Kann man hier sinnvollerweise den Median bestimmen?
4) Das *Herstellen von Beziehungen*, z. B. die Mittelungleichung $h \le g \le a \le q$ (Abbildung 7).

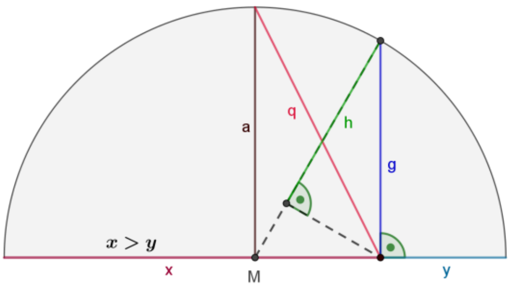


Abb. 7: $a(x,y) = \frac{x+y}{2}$; $g(x,y) = \sqrt{xy}$; $h(x,y) = \frac{2xy}{x+y}$; $q(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$

5.2 Strategien zur Erstellung

Üblicherweise sind bei Aufgaben Werte bzw. Objekte gegeben und Größen gesucht. Die Strategie *Aufgaben umkehren* geht von gegebenen Größen aus und Werte bzw. Objekte werden gesucht (Rott 2018, S. 19): Aufgabe 11 und Aufgabe 12.

Aufgabe 11 (Bleier et al. 2018, S. 307)

GK 888

Die Finanzministerin verspricht allen Unternehmen ab 20 Mitarbeitern einen Bonus von € 1000. Ein Bürgermeister kündigt begeistert an: „Wir werden mehr als 20 000 € bekommen, da die Firmen unseres Ortes durchschnittlich 22 Mitarbeiter haben!" Eine skeptische Bürgerin widerspricht: „Wir haben 21 Unternehmen. Eines davon hat 300 Arbeiter. Mir sind zwar die anderen Zahlen nicht bekannt, aber es können höchstens 8 Unternehmen den Bonus bekommen. Rechnen Sie nach, Herr Bürgermeister!"
Zeige, wie der Bürgermeister und die Skeptikerin auf ihre Zahlen kommen.

Niemand würde so in der Realität sprechen, das ist eben der Umkehrung geschuldet. Die Skeptikerin z. B. rechnet folgendermaßen: $21 \cdot 22 = 462; 462 - 300 = 162; x \cdot 20 + (20 - x) \cdot 1 \leq 162$, daraus folgt $x \leq 7$, also höchstens acht Firmen, wobei *x* die Anzahl der restlichen Unternehmen ist.

Aufgabe 12 (Teil 1- Aufgabe 20 des 1. Nebentermins, 20. September 2018, https://www.srdp.at/downloads/dl/nebentermin-1-201718-mathematik-ahs/)

Änderung einer Datenliste

Gegeben ist eine Datenliste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit n Werten und dem arithmetischen Mittel a. Diese Datenliste wird um zwei Werte x_{n+1} und x_{n+2} ergänzt, wobei das arithmetische Mittel der neuen Datenliste $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ ebenfalls a ist.

Aufgabenstellung:

Geben Sie für diesen Fall einen Zusammenhang zwischen x_{n+1}, x_{n+2} und a mithilfe einer Formel an!

Hier ist also das arithmetische Mittel einer Datenmenge gegeben und eine Eigenschaft zweier Datenwerte ist gesucht.

Um das Abarbeiten von Routineaufgaben interessanter zu gestalten, bietet sich das *Einstreuen von Störaufgaben* im Sinne einer Erweiterung an (Rott 2018, S. 19): Aufgabe 13.

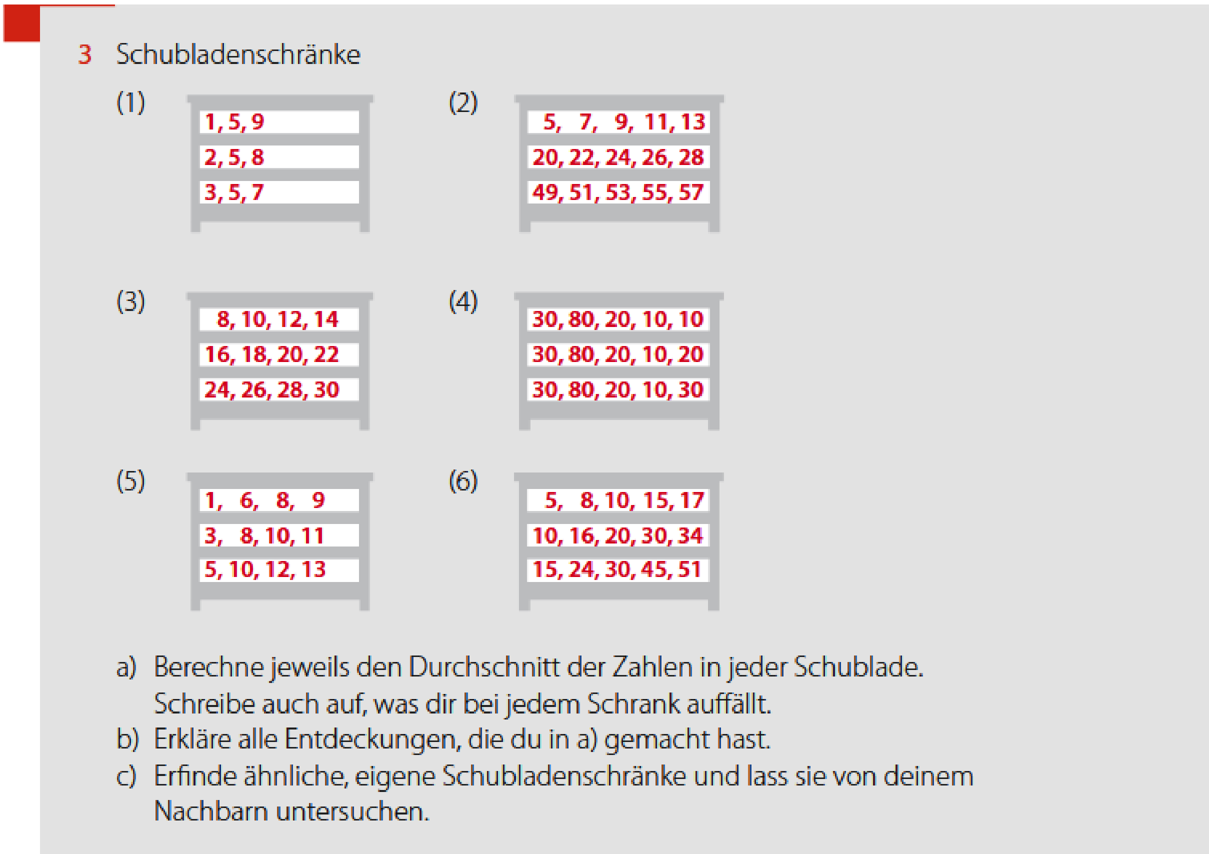
Aufgabe 13 (Rott 2018, S. 20)

Evelyn und Stefan sind Zwillinge, aber einander gar nicht ähnlich. Hier sind ihre errechneten Durchschnittswerte. Wie groß, wie schwer und wie alt könnten sie sein?

a. Durchschnittliche Größe: 155 cm
b. Durchschnittliches Gewicht: 45 kg
c. Durchschnittliches Alter: 12 Jahre 25 Tage

Aus einer Sammlung von Übungsaufgaben kann eine Auswahl getroffen werden, sodass eine Serie von Aufgaben vorliegt, die auf das *Erkennen und Nützen eines Musters* abzielt (Rott 2018, S. 19): Aufgabe 14 und Aufgabe 15.

Aufgabe 14 (Leuders 2009, S. 132)



3 Schubladenschränke

(1)
1, 5, 9
2, 5, 8
3, 5, 7

(2)
5, 7, 9, 11, 13
20, 22, 24, 26, 28
49, 51, 53, 55, 57

(3)
8, 10, 12, 14
16, 18, 20, 22
24, 26, 28, 30

(4)
30, 80, 20, 10, 10
30, 80, 20, 10, 20
30, 80, 20, 10, 30

(5)
1, 6, 8, 9
3, 8, 10, 11
5, 10, 12, 13

(6)
5, 8, 10, 15, 17
10, 16, 20, 30, 34
15, 24, 30, 45, 51

a) Berechne jeweils den Durchschnitt der Zahlen in jeder Schublade. Schreibe auch auf, was dir bei jedem Schrank auffällt.
b) Erkläre alle Entdeckungen, die du in a) gemacht hast.
c) Erfinde ähnliche, eigene Schubladenschränke und lass sie von deinem Nachbarn untersuchen.

Zum Beispiel zu Schrank (6): $x_i \rightarrow y_i = a \cdot x_i \Rightarrow \bar{x} \rightarrow \bar{y} = a \cdot \bar{x}$.

Aufgabe 15 (Wessel 2018, S. 39)

Berechne die Ableitungen und trage deine Ergebnisse in die Tabelle ein.

	A1: $\boldsymbol{f_1(x) = x \cdot e^x}$	**A2:** $\boldsymbol{f_2(x) = (1 + x) \cdot e^x}$	**A3:** $\boldsymbol{f_3(x) = (2 + x) \cdot e^x}$
$f'(x)$			
$f''(x)$			
$f'''(x)$			

1) Welche Auffälligkeiten erkennst du bei den berechneten Ableitungen?
2) Beschreibe das entdeckte Muster durch eine allgemeine Formel!
3) Begründe deine Entdeckungen mithilfe der allgemeinen Formel!

Während Aufgabe 15 über weite Strecken mit einem Computeralgebrasystem bearbeitet werden kann, verlangt die Begründung unter Punkt 3 eigenständige verallgemeinernde Überlegungen von Schülerinnen und Schülern.

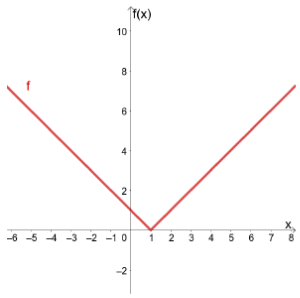
Für viele Aufgaben wie bei Aufgabe 16 können *Begründungen eingefordert* werden (Goy 2018, S. 5): „Gilt das immer?“, „Zeige, dass es keine anderen … gibt!“

Aufgabe 16

Welche der folgenden Eigenschaften haben die Funktionen jeweils **auf ganz** $\mathbb{R}$? Kreuzen Sie an!

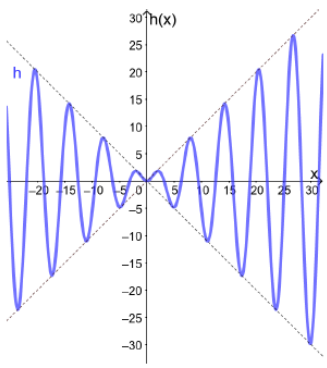
(a) $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty),\ f(x) = |x - 1|$

- ☐ unstetig.
- ☐ stetig, aber nicht differenzierbar.
- ☐ differenzierbar.



(c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x\,\sin(x)$

- ☐ unstetig.
- ☐ stetig, aber nicht differenzierbar.
- ☐ differenzierbar.



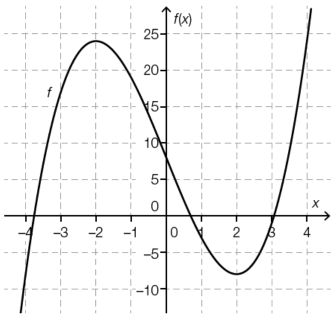
Eine Begründung für Teil a) könnte lauten: „Der Knick“ an der Stelle 1 bedeutet, dass links- und rechtsseitiger Grenzwert der Ableitung nicht übereinstimmen. Wir haben 2018 im Projekt BELLA („Beliefs zum Lehren und Lernen von Analysis“) diese Aufgabe fünfsemestrigen Lehramtsstudierenden (n = 211) gestellt und eine Lösungsquote von 80% erhoben (vgl. Abschnitt 4.1). Für Teil c) halten wir „Das Produkt von differenzierbaren Funktionen ist differenzierbar: Produktregel“ fest. Hier erzielten die Studierenden (n = 210) eine Lösungsquote von 69%.

Es folgen nun drei Aufgaben aus dem Inhaltsbereich *Analysis* vom zweiten Nebentermin am 15. Jänner 2019 der ssRP unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades (vgl. Abschnitt 4.1). Explizit sind zwar keine Begründungen gefragt, es müssen aber „innere Monologe“ geführt werden, um zu den richtigen Antworten zu kommen.

Aufgabe 17 (Teil 1-Aufgabe 16 des 2. Nebentermins, 15. Jänner 2019, https://www.srdp.at/downloads/dl/nebentermin-2-201718-mathematik-ahs/)

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades f. Die Stellen $x = -2$ und $x = 2$ sind Extremstellen von f.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$f'(0) = 0$	☐
$f''(1) > 0$	☐
$f'(-3) < 0$	☐
$f'(2) = 0$	☐
$f''(-2) > 0$	☐

„An der Stelle x = 2 befindet sich ein Extremum.“, führt zum Ankreuzen der vierten Aussage. Hier handelt es sich um eine *leichte* Aufgabe, weil sie einschrittig ist und bloßes Vorwärtsarbeiten verlangt (vgl. Abschnitt 4.1).

Aufgabe 18 (Teil 1-Aufgabe 15 des 2. Nebentermins, 15. Jänner 2019, https://www.srdp.at/downloads/dl/nebentermin-2-201718-mathematik-ahs/)

Zusammenhang zwischen Funktion und Stammfunktionen

Die Funktionen g und h sind unterschiedliche Stammfunktionen einer Polynomfunktion f vom Grad $n \geq 1$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$g'(x) = h'(x)$	☐
$g(x) + h(x) = c,\; c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	☐
$\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = f(2) - f(0)$	☐
$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = h(2) - h(0)$	☐
$g(x) = c \cdot h(x),\; c \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$	☐

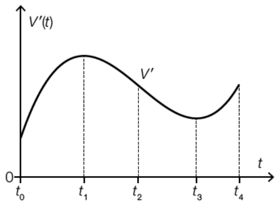
Der zweite Teil des Hauptsatzes der Differential-Integral-Rechnung entspricht der vierten Aussage. Den Schwierigkeitsgrad stufen wir als *mittel* ein, da die inhaltliche Komplexität doch höher ist als bei Aufgabe 17.

Aufgabe 19 (Teil 1-Aufgabe 14 des 2. Nebentermins, 15. Jänner 2019, https://www.srdp.at/downloads/dl/nebentermin-2-201718-mathematik-ahs/)

Veränderung eines Flüssigkeitsvolumens

Das in einem Gefäß enthaltene Flüssigkeitsvolumen V ändert sich im Laufe der Zeit t im Zeitintervall $[t_0; t_4]$.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion V', die die momentane Änderungsrate des im Gefäß enthaltenen Flüssigkeitsvolumens in diesem Zeitintervall angibt.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß nimmt im Zeitintervall $[t_1; t_3]$ ab.	☐
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zum Zeitpunkt t_2 kleiner als zum Zeitpunkt t_3.	☐
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß weist zum Zeitpunkt t_3 die niedrigste momentane Änderungsrate auf.	☐
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zum Zeitpunkt t_4 am größten.	☐
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zu den Zeitpunkten t_2 und t_4 gleich groß.	☐

Aus der Begründung: „Zwischen den Zeitpunkten t_2 und t_3 ist V‘ positiv, daher nimmt das Flüssigkeitsvolumen in diesem Zeitintervall zu.“, folgt die Richtigkeit der zweiten Aussage. Diese Aufgabe ist *schwierig* aufgrund des Kontextes, der inhaltlichen Komplexität und der Anzahl der Denkprozesse (vgl. Abschnitt 4.1).

Fehler finden und berichtigen in vorgegebenen Texten oder Gleichungsumformungen kann durch Verbalisierungen der Schülerinnen und Schüler zum Ausdruck gebracht werden: „Was hat … falsch gemacht?“ „Worin besteht der Fehler? Stelle richtig!“ (Goy 2018, S. 7) Vergleiche dazu Abbildung 8 und Aufgabe 20!

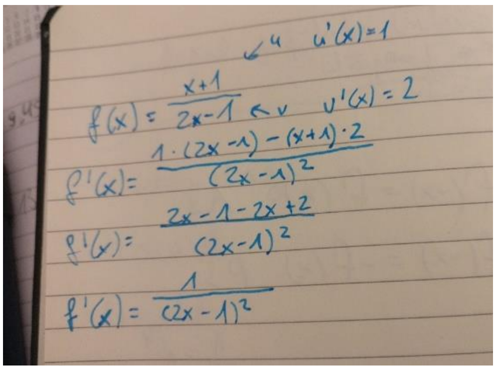


Abb. 8: https://de.serlo.org/105440/typische-fehler-klammern

Aufgabe 20 (vgl. Götz & Reichel 2013, S. 54)

Max und Eva berechnen das folgende Integral auf verschiedene Arten:

$z = 2x$: $\int \sin 2x \, dx = \cdots = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$

$z = \sin x$: $\int \sin 2x \, dx = 2\int \sin x \cos x \, dx = \cdots = \sin^2 x + c$

Hat sich eine/r der beiden geirrt?

Aufgabe 20 enthält eine Irritation – wie sich herausstellt, keinen Fehler: $\sin^2 x - \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) = \frac{1}{2}$.

Zum *Vernetzen* im Mathematikunterricht, d. h. zum *Verbindungen herstellen* eignen sich die Inhaltsbereiche Geometrie und Algebra besonders gut (Goy 2018, S. 9). Durch das Übersetzen werden algebraische Ausdrücke zu geometrischen Darstellungen und vice versa.

Aufgabe 21

Zeige mit Mitteln der Differenzialrechnung die Spaltform der Tangente im Berührpunkt $T(x_T|y_T)$ eines Kegelschnitts in erster Hauptlage!

Aufgabe 21 enthält noch zusätzlich Elemente des Inhaltsbereiches Analysis neben algebraischen Umformungen, für die Parabel ergibt sich: $y^2 = 2px \Rightarrow y'(x_T) = \frac{p}{y_T} \Rightarrow d = y_T - \frac{p}{y_T}x_T \Rightarrow \cdots \Rightarrow yy_T = p(x + x_T)$. Die geometrische Entsprechung (Abbildung 9) illustriert den gesuchten Sachverhalt. Eine alternative Herleitung verwendet die Berührbedingung. Ein Vergleich ist angebracht.

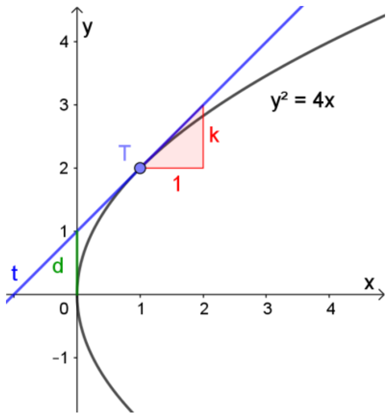


Abb. 9: Zur Herleitung der Tangentengleichung an die Parabel

Aufgabe 22 verbindet Elemente der Elementargeometrie (Flächeninhalt geometrischer Figuren) mit dem bestimmten Integral.

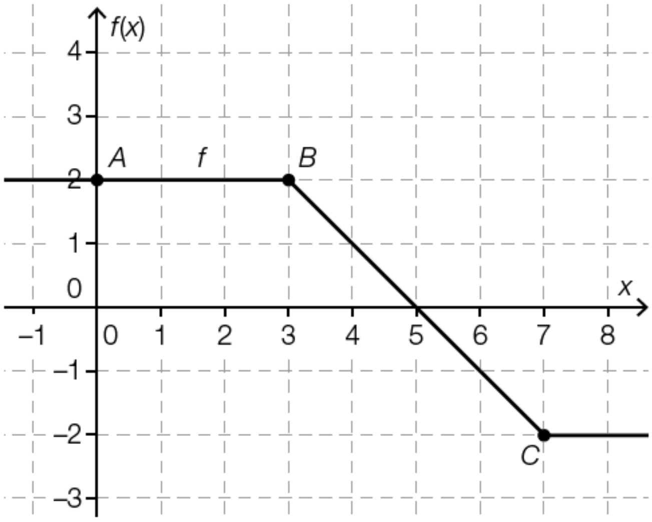
6 Ermutigung

Wir sehen das intelligente Üben so lohnenswert, dass wir raten, aus guten Schulbüchern Aufgaben zu sammeln (Aufgabe 11 und Aufgabe 20), vorhandene Aufgaben eventuell (durch Begründungen) zu ergänzen (Aufgabe 17, Aufgabe 18 und Aufgabe 19) oder selbst systematisch zu konstruieren (Abschnitt 5).

Aufgabe 22 (Teil 1-Aufgabe 17 des 1. Nebentermins, 20. September 2018, https://www.srdp.at/downloads/dl/nebentermin-1-201718-mathematik-ahs/)

Bestimmtes Integral

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer abschnittsweise linearen Funktion *f* dargestellt. Die Koordinaten der Punkte *A*, *B* und *C* des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x$!

$\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x =$ ____________________

Literatur

Bleier, G.; Lindenberg, J.; Lindner, A.; Süss-Stepancik, E. (2017): *Dimensionen Mathematik 5*. Wien: Dorner.

Bleier, G.; Lindenberg, J.; Lindner, A.; Süss-Stepancik, E. (2018): *Dimensionen Mathematik 6*. Wien: Dorner.

Block, J. (2018): Sortieren und Variieren. Aufgaben werden zu Aufgaben. In: *mathematik lehren* 209, 22–27.

Büchter, A.; Leuders, T. (2005): *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen.

Drüke-Noe, C. (2018): Einfach – mittel – schwierig … Wenn das so einfach wäre: Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades entwickeln. In: *mathematik lehren* 209, 9–12.

Drüke-Noe, C.; Siller, H.-S. (2018): Aufgaben als Aufgabe. Aufgaben auswählen, charakterisieren, variieren. In: *mathematik lehren* 209, 2–8.

Fischer, R.; Malle, G. (1985): *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln* (unter Mitarbeit von H. Bürger). Mannheim u. a.: B.I.-Wissenschaftsverlag.

Götz, S.; Reichel H.-C. (Hrsg., 2010): *Mathematik 5* von R. Müller und G. Hanisch. Wien: öbv.

Götz, S.; Reichel H.-C. (Hrsg., 2013): *Mathematik 8* von R. Müller und G. Hanisch. Wien: öbv.

Götz, S.; Süss-Stepancik, E. (2018): Vom Testen zum (kompetenten) Lernen im Mathematikunterricht. In: *R&E-SOURCE, Tag der Mathematik 2018. Wer Mathe lernt, hat mehr Erfolg im Leben!* Online: https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/article/view/566 (Zugriff: 11.09.2019).

Goy, A. (2018): Aufgaben verändern: Quadratische Gleichungen. In: *mathematik lehren* 209, MatheWelt. Das Schülerarbeitsheft.

Kramer, S.; Sattlberger, E. (2016): Habuemus Haupttermin – die SRP in Mathematik (AHS) nach 2015 – wie war's und wie geht's weiter? In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österr. Math. Ges.* 49, 60–73. Online: https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2016%20Band%2049/VortragKramerSattlberger.pdf (Zugriff: 10.09.2019).

Leuders, T. (2009): Intelligent üben und Mathematik erleben. In: Leuders, T.; Hefendehl-Hebeker, L.; Weigand, H. G. (Hrsg.): *Mathemagische Momente* (S. 130–143). Berlin: Cornelsen.

Malle, G. et al. (2010): *Mathematik verstehen 5*. Wien: öbv.

Müller, J.H. (2005): Entdeckend Lernen mit Zahlenmauern in der Sekundarstufe. In: *Praxis der Mathematik in der Schule*, **47. Jg.**, Heft 2, 32–38.

Reichel, H.-C.; Humenberger, H. (Hrsg., 2011a): *Das ist Mathematik 1* von D. Litschauer, H. Groß und V. Aue. Wien: öbv.

Reichel, H.-C.; Humenberger, H. (Hrsg., 2011b): *Das ist Mathematik 2* von D. Litschauer, H. Groß und V. Aue. Wien: öbv.

Rott, B. (2018): Kleine Änderung mit großer Wirkung. Produktives Üben durch Variation von Aufgaben. In: *mathematik lehren* 209, 18–21.

Wessel, L. (2018): Strukturierte Aufgabenfolgen. Begründen üben und Ableitungsregeln trainieren. In: *mathematik lehren* 209, 38–42.

Winter, H. (2016): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik* (3., aktualisierte Auflage). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Verfasser/Verfasserin

Stefan Götz
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Oskar-Morgenstern-Platz 1
1090 Wien

stefan.goetz@univie.ac.at

Evelyn Süss-Stepancik
Pädagogische Hochschule Niederösterreich
Department 3 – Fächer
Mühlgasse 67
2500 Baden

evelyn.stepancik@ph-noe.ac.at